

实验7 非线性方程求根

计52 路橙 2015010137

实验要求

实验题目

1. 求解非线性方程

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$$

在区间 $[-3, 3]$ 内的实根。

要求：

- 分别利用二分法、牛顿法求解上述方程的根
- 两种迭代法的求解精度均为0.00001
- 输出两种迭代算法的迭代初值、各次迭代值、迭代次数。

2. 研究迭代函数、迭代初值对函数收敛性以及收敛速度的影响

(1) 用迭代法求解方程 $2x^3 - x - 1 = 0$ 的根。

方案一： $x = (\frac{x+1}{2})^{\frac{1}{3}} = \phi(x)$ ，初值为0，迭代10次。

方案二： $x = 2x^3 - 1 = \phi(x)$ ，初值为0，迭代10次。

要求：给出迭代10次后的方程的根；对迭代函数的不同对结果的影响作简要分析。

(2) 用牛顿法求解方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的根。

方案一：初始值为1.5

方案二：初始值为0

要求：迭代法的求解精度均为0.00001；给出迭代次数和各次迭代值；对迭代初值的不同对结果的影响作简要分析。

初始数据

求解精度为0.00001，对于牛顿法选取控制常数 $C = 1$ 。

算法描述

二分法

1. 计算 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 端点处的值 $f(a), f(b)$ 。
2. 计算 $f(x)$ 在区间中点 $\frac{a+b}{2}$ 的值 $f(\frac{a+b}{2})$ 。
3. 若 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 则 $\frac{a+b}{2}$ 是根; 否则:
 - 若 $f(\frac{a+b}{2})f(a) < 0$, 则以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 b
 - 否则, 以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 a 。
4. 反复执行2和3, 直到区间长度 $b - a$ 小于允许误差 ϵ , 此时中点 $\frac{a+b}{2}$ 即为所求近似根。

牛顿法

1. 选取初始近似值 x_0 , 计算 $f_0 = f(x_0), f'_0 = f'(x_0)$ 。
2. 根据公式 $x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f'_0}$ 迭代一次, 得到新的近似值 x_1 , 计算 $f_1 = f(x_1), f'_1 = f'(x_1)$ 。
3. 若 x_1 满足 $|\delta| < \epsilon_1$ 或 $|f_1| < \epsilon_2$, 则终止迭代, 以 x_1 作为所求的根; 否则转步骤4. 此处 ϵ_1, ϵ_2 是允许误差, 而

$$\delta = \begin{cases} |x_1 - x_0|, & |x_1| < C \\ \frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|}, & |x_1| \geq C \end{cases}$$

其中 C 是取绝对误差或相对误差的控制常数, 一般可取 $C=1$ 。

4. 如果迭代次数达到预先指定的次数 N , 或者 $f'_1 = 0$, 则方法失败; 否则以 (x_1, f_1, f'_1) 代替 (x_0, f_0, f'_0) , 转步骤2继续迭代。

不动点迭代法

对于方程 $f(x) = 0$, 将方程改写成等价的形式 $\phi(x) = x$, 若函数 $\phi(x) \in C[a, b]$ 满足条件:

- 对任意 $x \in [a, b]$, 有 $a \leq \phi(x) \leq b$
- 对任意 $x \in [a, b]$, 有 $|\phi'(x)| < 1$

则对于任意初值 $x_0 \in [a, b]$, 由 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到函数 $f(x) = 0$ 的根。

程序清单说明

- 1.cpp是第一题
- 2-1.cpp是第二题第一问
- 2-2.cpp是第二题第二问

运行结果与分析

1.

二分法

迭代初值 $a = -3, b = 3$, 迭代了20次, 如下:

次数	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$
1	-3	3	0	-1
2	0	3	1.5	8
3	0	1.5	0.75	1.53125
4	0	0.75	0.375	0.0898438
5	0	0.375	0.1875	-0.459473
6	0.1875	0.375	0.28125	-0.190857
7	0.28125	0.375	0.328125	-0.0526352
8	0.328125	0.375	0.351562	0.0179949
9	0.328125	0.351562	0.339844	-0.0174628
10	0.339844	0.351562	0.345703	0.000229135
11	0.339844	0.345703	0.342773	-0.00862593
12	0.342773	0.345703	0.344238	-0.00420068
13	0.344238	0.345703	0.344971	-0.00198635
14	0.344971	0.345703	0.345337	-0.00087875
15	0.345337	0.345703	0.34552	-0.000324843
16	0.34552	0.345703	0.345612	-4.78631e-005
17	0.345612	0.345703	0.345657	9.06338e-005
18	0.345612	0.345657	0.345634	2.13848e-005
19	0.345612	0.345634	0.345623	-1.32393e-005
20	0.345623	0.345634	0.345629	4.07272e-006

牛顿法

选取迭代初值 $x_0 = 0.5$ ，共迭代了3次，各次迭代值如下：

次数	x_0	x_1	$f(x_1)$
1	0.5	0.357143	0.0349854
2	0.357143	0.345676	0.000147256
3	0.345676	0.345627	2.54396e-9

讨论

对比两种方法可以看出，牛顿法收敛速度很快，而二分法收敛速度很慢。

由于牛顿法依赖初始值 x_0 ，为了选取适当的 x_0 ，我们可以通过**首先通过二分法找到 x_0 所在区间，接着通过牛顿法快速求解方程**，从而很快速地进行非线性方程的近似求解。

2.

(1)

方案一

最终方程的根为： $x = 0.9999999786$ ，各次迭代如下：

次数	x	$\phi(x)$
1	0	0.793700526
2	0.793700526	0.9643617579
3	0.9643617579	0.9940246594
4	0.9940246594	0.9990031165
5	0.9990031165	0.9998338251
6	0.9998338251	0.9999723034
7	0.9999723034	0.9999953839
8	0.9999953839	0.9999992306
9	0.9999992306	0.9999998718
10	0.9999998718	0.9999999786

方案二

由于

$$|\phi'(x)| = |6x^2 - 1|$$

在 $x_0 = 0$ 时， $|\phi'(x_0)| = 1$ ，不满足收敛性。

由于方程的根 $x \in [0.9, 1.1]$ ，而对于 $x \in [0.9, 1.1]$ 时， $|\phi'(x)| > 1$ ，因此迭代函数必定发散。

故该迭代函数不可能得到正确的结果。

实验时，迭代法会求出 $-inf$ 的值，即验证了迭代函数的发散。

对迭代函数的讨论

由于不动点迭代法对迭代函数有收敛性的要求，若迭代函数不满足收敛性，则迭代将无法获得正确的解，反而会越来越发散，最终趋于无穷。因此，对于不动点迭代法，需要巧妙地构造函数 $\phi(x)$ ，使得函数满足收敛性的两个要求（见算法介绍部分）。

(2)

方案一

初始值为 $x_0 = 1.5$ ，共迭代了3次，各次迭代如下：

次数	x_0	x_1	$f(x_1)$
1	1.5	1.34783	0.100682
2	1.34783	1.3252	0.00205836
3	1.3252	1.32472	9.24378e-007

方案二

初始值为 $x_0 = 0$ ，共迭代了20次，各次迭代如下：

次数	x_0	x_1	$f(x_1)$
1	0	-1	-1
2	-1	-0.5	-0.625
3	-0.5	-3	-25
4	-3	-2.03846	-7.43201
5	-2.03846	-1.39028	-2.29697
6	-1.39028	-0.911612	-0.845971
7	-0.911612	-0.345028	-0.696045
8	-0.345028	-1.42775	-2.48268
9	-1.42775	-0.942418	-0.894592
10	-0.942418	-0.404949	-0.661456
11	-0.404949	-1.7069	-4.2662
12	-1.7069	-1.15576	-1.38807
13	-1.15576	-0.694192	-0.640341
14	-0.694192	0.742494	-1.33316
15	0.742494	2.7813	17.7337
16	2.7813	1.98273	4.81176
17	1.98273	1.53693	1.09352
18	1.53693	1.35726	0.143034
19	1.35726	1.32566	0.00403421
20	1.32566	1.32472	3.54549e-006

对初值选取的讨论

可以看到，对于牛顿迭代法，若初值选择较为合适（方案一），则很小的次数内即可迭代到所需精度。

而若初值选择不合适（方案二），迭代次数会有明显的提高。

并且仔细观察方案二可以看出来，在迭代的过程中， $f(x_1)$ 的值经历了从负数先变小再变大，然后变为正数，接着再变大再变小，最终得到所需精度。可以看出， $|f(x_1)|$ 在求解时并没有单调递减，而是发生了明显的抖动。这直接导致了迭代次数增多。

因此，牛顿迭代法需要合理选取迭代初值。一种方法是用二分法来选取。

体会与展望

本次实验我对牛顿法初值的选取、二分法速度较慢、不动点迭代法选取迭代函数都有了深刻的认识。